STATYKA I DYNAMIKA PŁYNÓW

MATERIA

CIAŁA STAŁE

- posiadają określony rozmiar i kształt

PŁYNY

- łatwo zmieniają swój kształt
- nie posiadają sprężystości kształtu
- posiadają sprężystość objętości

CIECZE

GAZY

STATYKA I DYNAMIKA PŁYNÓW

Siła parcia – siła powierzchniowa działająca na płyn o kierunku zawsze prostopadłym do powierzchni płynu

Spoczywający płyn nie może równoważyć sił stycznych, dlatego może zmieniać kształt i płynąć!

WIELKOŚCI SŁUŻĄCE DO OPISU PŁYNÓW

1. Ciśnienie

2. Gęstość

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Gęstość płynów zależy od wielu czynników, między innymi temperatury i ciśnienia!

CIŚNIENIE

Ciśnienie – stosunek siły parcia działającej na powierzchnię do wielkości tej powierzchni

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest Pascal!

$$1\ Pa = 1\ \frac{N}{m^2}$$

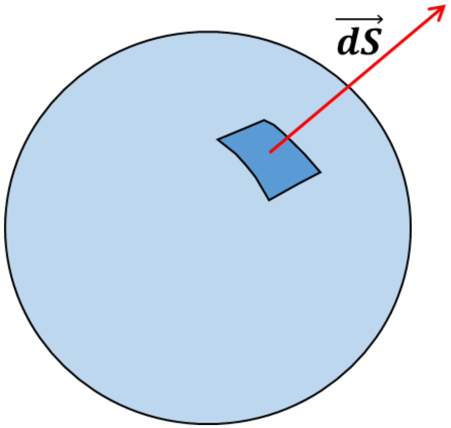
Inne jednostki ciśnienia:

bar: $$1\ bar = 10^5\ Pa$$

atmosfera: $$1\ atm = 101325\ Pa = 1013{,}25\ hPa$$

milimetr słupa rtęci: $$760\ \mathrm{mmHg} = 1\ atm$$

Wektor powierzchniowy – wektor prostopadły do powierzchni i zwrócony na zewnątrz niej, o długości równej polu tej powierzchni



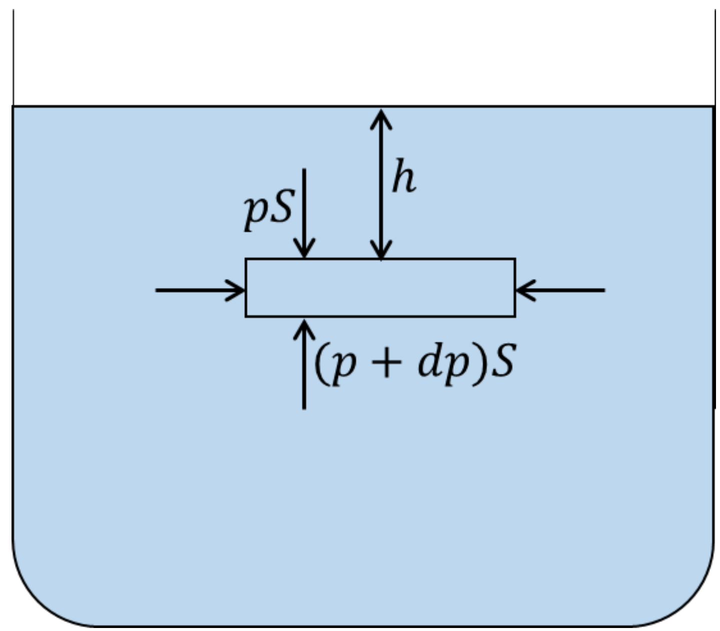
Siła wywierana przez płyn na element powierzchni:

$$\vec{F} = p \cdot \vec{S}$$

$$p = \frac{F}{S}$$

CIŚNIENIE W NIERUCHOMYM PŁYNIE

Siły działające na element cieczy znajdujący się na głębokości h:



Warunek równowagi sił:

$$(p + dp) \cdot S = p \cdot S + \rho \cdot S \cdot dh \cdot g$$

$$dp \cdot S = \rho \cdot g \cdot S \cdot dh$$

STATYKA I DYNAMIKA PŁYNÓW

$$\frac{dp}{dh} = \rho \cdot g$$

$$\frac{dp}{dh} \neq 0$$

$$p \neq const$$

Ciśnienie zmienia się z głębokością!

$$\int dp = \rho \cdot g \int dh = \rho \cdot g \cdot h + const$$

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

p_0 – ciśnienie na powierzchni cieczy (dla $h = 0$)

Ciśnienie rośnie z głębokością i dla tych samych głębokości ma taką sama wartość!

Ciśnienie nie zależy od kształtu naczynia!

Ciężar właściwy:

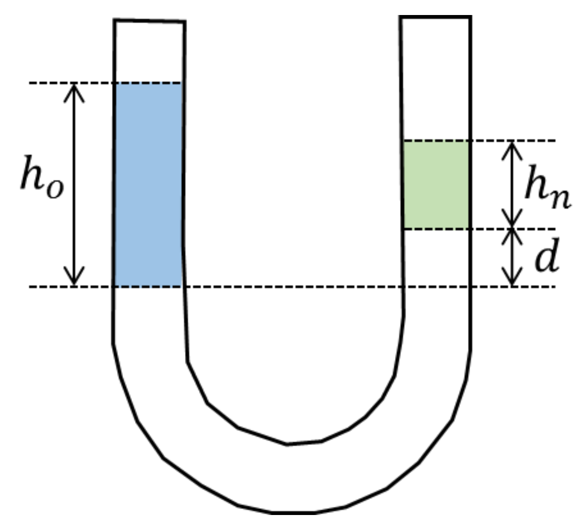
$$\gamma = \rho \cdot g$$

Przykład 1. Do rurki w kształcie litery U nalano rtęci, a na jej powierzchnię w jednym ramieniu wlano oliwy o ciężarze właściwym $\gamma_o = 9200 \frac{N}{m^3}$, a w drugim ramieniu nafty o ciężarze właściwym $\gamma_n = 8100 \frac{N}{m^3}$. Wysokość słupków oliwy i nafty wynosiła odpowiednio $h_o = 0{,}48\, m$ i $h_n = 0{,}2\, m$. Obliczyć różnicę poziomów rtęci w obu ramionach rurki wiedząc, że ciężar właściwy rtęci wynosi $\gamma_r = 135460 \frac{N}{m^3}$.

$$p_a + \gamma_o \cdot h_o = p_a + \gamma_n \cdot h_n + \gamma_r \cdot d$$

$$d = \frac{\gamma_o \cdot h_o - \gamma_n \cdot h_n}{\gamma_r}$$

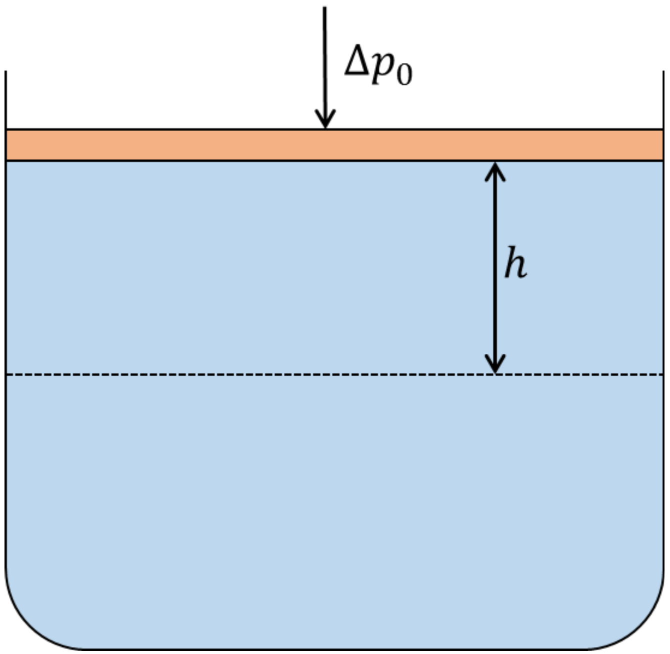
$$d = \frac{9200 \cdot 0{,}48 - 8100 \cdot 0{,}2}{135460} = 0{,}021\, m = 2{,}1\, cm$$



PRAWO PASCALA

Ciśnienie zewnętrzne p_0 ulega zmianie o Δp_0, dla cieczy nieściśliwej ($\rho = const$) mamy wówczas:

$$p = p_0 + \Delta p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$



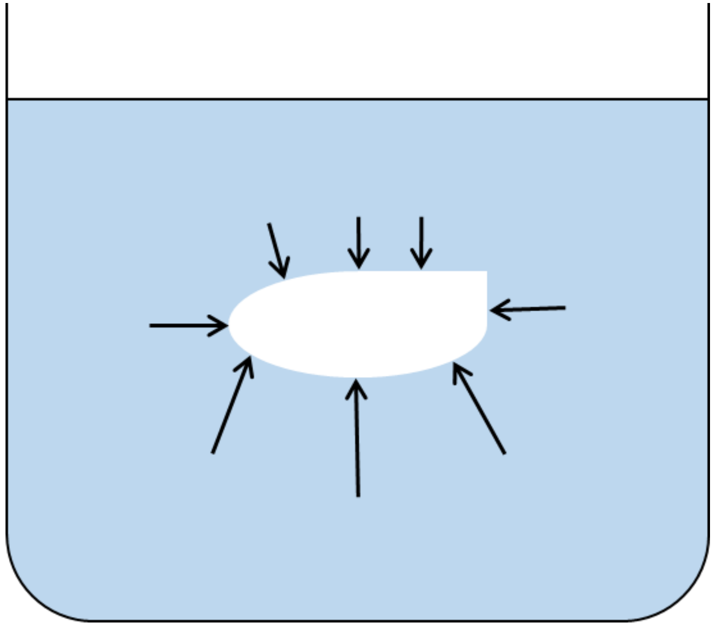
Prawo Pascala:

Ciśnienie zewnętrzne wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmienione na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia.

PRAWO ARCHIMEDESA

Jeżeli ciało zanurzone jest częściowo lub w całości w nieruchomym płynie, to ten płyn wywiera ciśnienie na każdy element powierzchni ciała będący z nim w kontakcie. Wypadkowa siła, zwana siłą wyporu (statyczna siła nośna) jest skierowana ku górze.

$$F_{wyp} = m_p \cdot g = \rho_p \cdot V_c \cdot g$$
$$F_{wyp} = \gamma_p \cdot V_c$$



Gdzie:

m_p – masa płynu

V_c – objętość zanurzonej części ciała

ρ_p – gęstość płynu

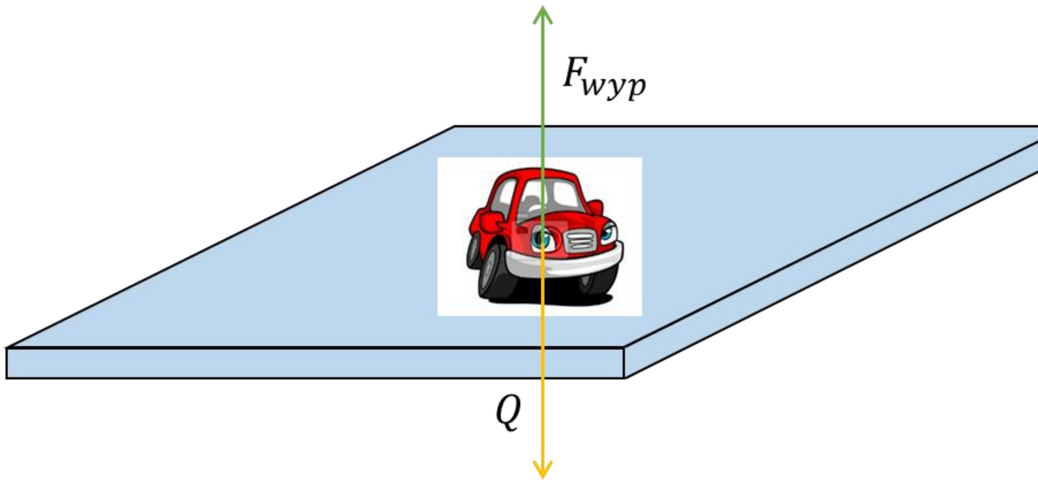
γ_p – ciężar właściwy płynu

Prawo Archimedesa:

Ciało w całości lub częściowo zanurzone w płynie jest wypierane ku górze siłą równą ciężarowi wypartego przez to ciało płynu.

Przykład 2. Ile co najmniej musi wynosić pole powierzchni tafli lodu o grubości $\mathrm{d} = 0{,}3\,m$, pływającej w słodkiej wodzie, aby nie zatonęła po postawieniu na niej samochodu o masie $1100\,kg$? Gęstość lodu oraz wody jest znana i wynosi odpowiednio $917\ \frac{kg}{m^3}$ oraz $1000\ \frac{kg}{m^3}$.

$$F_{wyp} = Q$$



$$m_w \cdot g = (m_l + m_s) \cdot g$$

$$\rho_w \cdot V_l \cdot g = (\rho_l \cdot V_l + m_s) \cdot g$$

$$\rho_w \cdot S \cdot d \cdot g = (\rho_l \cdot S \cdot d + m_s) \cdot g$$

$$\rho_w \cdot S \cdot d \cdot g - \rho_l \cdot S \cdot d \cdot g = m_s \cdot g$$

$$S \cdot d \cdot g \cdot (\rho_w - \rho_l) = m_s \cdot g$$

$$S = \frac{m_s}{(\rho_w - \rho_l) \cdot d} = \frac{1100}{(1000 - 917) \cdot 0{,}3} = \frac{1100}{83 \cdot 0{,}3} \approx 44{,}2\,m^2$$

PRZEPŁYW PŁYNÓW

Przepływ laminarny = ustalony – prędkość płynu w dowolnym punkcie jest stała w czasie (każda cząsteczka przechodząca przez ten punkt zachowuje się w identyczny sposób). Taki przepływ obserwuje się przy niewielkich prędkościach przepływu (przeciwieństwo – przepływ nieustalony)

Przepływ bezwirowy – w żadnym punkcie cząstka nie ma prędkości kątowej (przeciwieństwo – przepływ wirowy)

Przepływ nieściśliwy – gęstość płynu nie zmienia się. Dla cieczy przepływ jest zwykle nieściśliwy, dla gazów też można stworzyć warunki przepływu nieściśliwego (przeciwieństwo – przepływ ściśliwy)

Przepływ lepki – lepkość to opór płynów przeciw płynięciu pod działaniem zewnętrznych sił, jest odpowiednikiem tarcia obserwowanego dla ciał stałych (przeciwieństwo – przepływ nielepki)

PRZEPŁYWY USTALONE, BEZWIROWE, NIEŚCISLIWE I NIELEPKIE

Dla przepływu ustalonego prędkość płynu w dowolnym punkcie jest stała w czasie i wszystkie cząsteczki, które przez to miejsce przechodzą mają tą samą prędkość!

Wystarczy prześledzić tor jednej cząsteczki, żeby mieć informacje o wszystkich pozostałych!

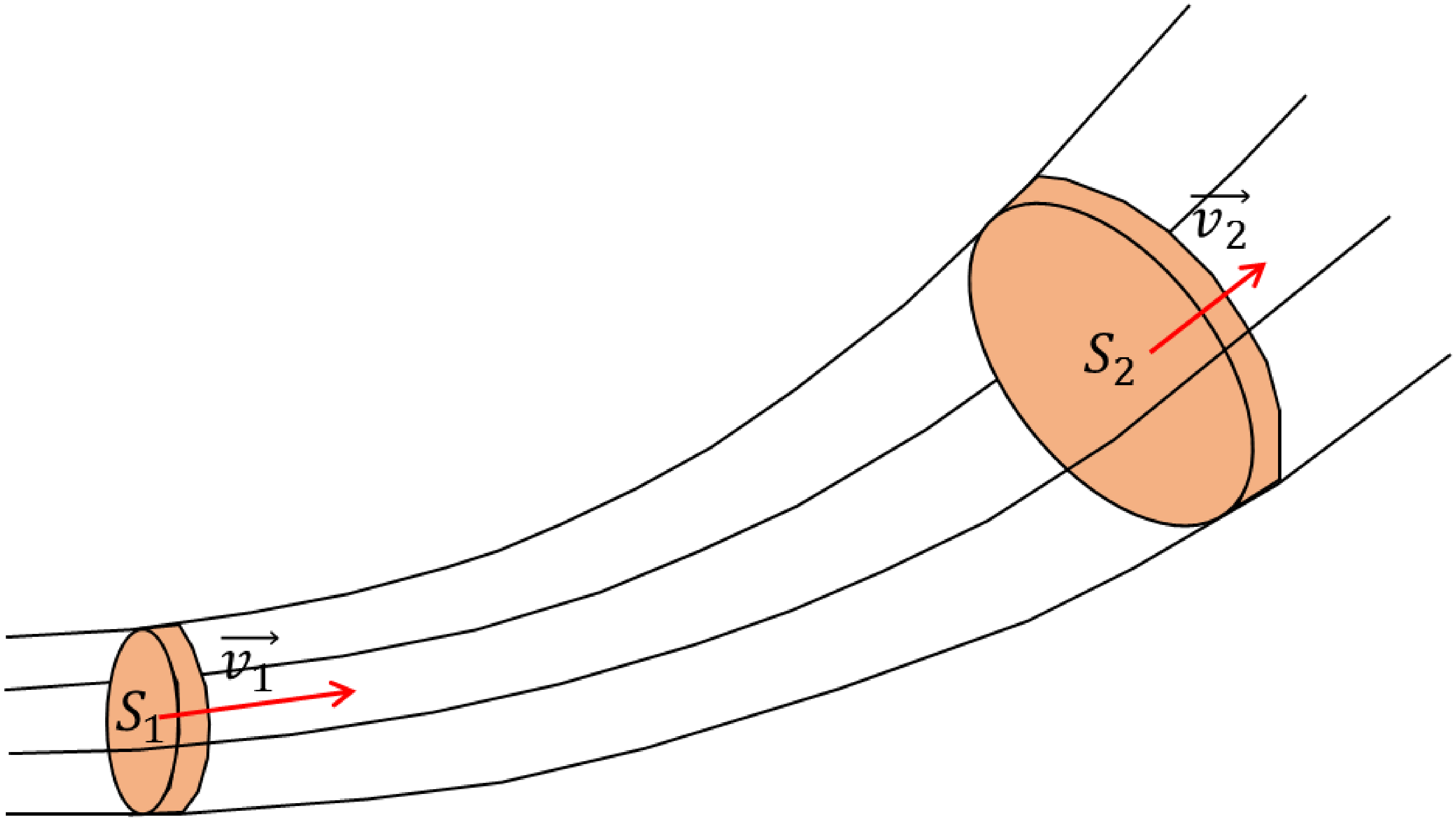
Linia prądu – tor pojedynczej cząsteczki, linia równoległa do wektora prędkości

Dwie linie prądu nie mogą się przecinać, bo wówczas nie można byłoby jednoznacznie ustalić losów cząsteczki od punktu przecięcia i przepływ nie byłby laminarny!

Struga prądu – wiązka skończonej liczby linii prądu

Przez brzegi strugi płyn nie przepływa, jeśli wpłynie jednym końcem strugi musi ja opuścić drugim końcem!

RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI



Masa płynu przepływająca przez przekrój S_1 w czasie Δt wynosi:

$$\Delta m_1 = \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

Analogicznie dla przekroju S_2:

$$\Delta m_2 = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

Dla płynu nieściśliwego $\rho = const!$

Masy przepływające w czasie Δt przez oba przekroje muszą być sobie równe (płyn nie opuszcza strugi)!

$$\rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

$$S \cdot v = const$$

Prawo ciągłości strugi – dla przepływu ustalonego i nieściśliwego prędkość płynu jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju strugi

Zagęszczenia i rozrzedzenia linii prądu odpowiadają miejscom o dużej i małej prędkości (odpowiednio)!

Przykład 3. Gumowy wąż ogrodowy o średnicy wewnętrznej wynoszącej 2 cm połączony jest z rozpryskiwaczem, który składa się z oprawki zaopatrzonej w 24 otwory, każdy o średnicy 0,15 cm. Z jaką prędkością wylatuje woda z rozpryskiwacza, jeżeli w wężu ma ona prędkość 1 m/s.

$$S \cdot v = const = S_1 \cdot v_1 = 24 \cdot S_2 \cdot v_2$$

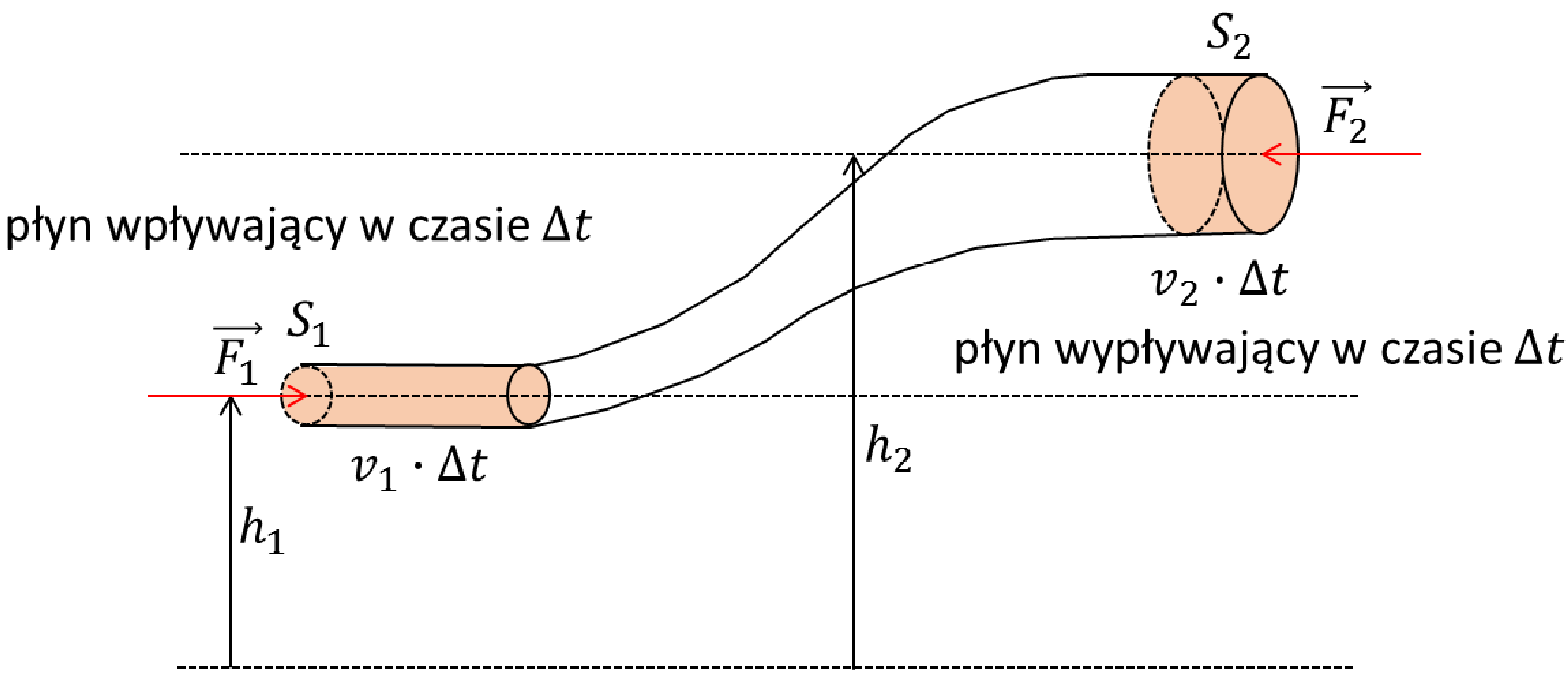
$$\pi \cdot (\frac{d_1}{2})^2 \cdot v_1 = 24 \cdot \pi \cdot (\frac{d_2}{2})^2 \cdot v_2$$

$$\pi \cdot \frac{{d_1}^2}{4} \cdot v_1 = 24 \cdot \pi \cdot \frac{{d_2}^2}{4} \cdot v_2$$

$$v_2 = \frac{{d_1}^2 \cdot v_1}{24 \cdot {d_2}^2} = \frac{(2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1}{24 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{24 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^2}{19{,}5} \approx 5 \ \frac{m}{s}$$

RÓWNANIE BERNOULLIEGO

Powierzchnia S_1 w czasie Δt przemieszcza się o odcinek $v_1 \cdot \Delta t$. Analogicznie powierzchnia S_2 w czasie Δt przemieszcza się o odcinek $v_2 \cdot \Delta t$. Na powierzchnie S_1 i S_2 działają odpowiednio siły $F_1 = p_1 \cdot S_1$ i $F_2 = p_2 \cdot S_2$.



Twierdzenie o pracy i energii – praca wykonana przez wypadkową siłę jest równa zmianie energii układu

$$W = F_1 \cdot \Delta s_1 - F_2 \cdot \Delta s_2 = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

$$W = p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

Objętość płynu V wpływająca do strugi równa jest objętości wypływającej ze strugi!

$$S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t = V$$

$$W = p_1 \cdot V - p_2 \cdot V = V \cdot (p_1 - p_2)$$

Wykonana praca jest równa zmianie całkowitej energii płynu!

$$V \cdot (p_1 - p_2) = \left(\frac{m \cdot {v_2}^2}{2} + m \cdot g \cdot h_2\right) - \left(\frac{m \cdot {v_1}^2}{2} + m \cdot g \cdot h_1\right)$$

STATYKA I DYNAMIKA PŁYNÓW

$$(p_1 - p_2) = \left(\frac{\rho \cdot {v_2}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2\right) - \left(\frac{\rho \cdot {v_1}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1\right)$$

$$p_1 + \frac{\rho \cdot {v_1}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot {v_2}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p + \frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = const$$

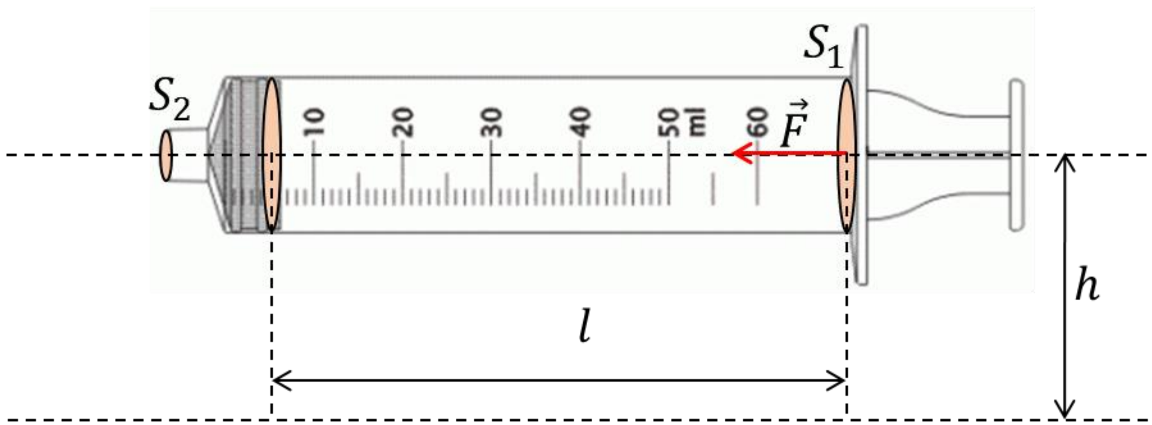
ciśnienie hydrodynamiczne ***ciśnienie hydrostatyczne***

Równanie Bernoulliego jest podstawowym równaniem mechaniki płynów!

Z przepływem płynu związane jest ciśnienie hydrostatyczne i hydrodynamiczne!

Przepływ cieczy w strudze może być wywołany różnicą ciśnień na jej końcach lub różnicą ich poziomów!

Przykład 4. Przekrój tłoka strzykawki wynosi $S_1 = 1{,}8\,cm^2$, przekrój otworu zaś $S_2 = 2\,mm^2$. W jakim czasie wypłynie woda ze strzykawki, jeżeli na tłok działamy siłą $F = 7{,}5\,N$, a tłok ma się przesunąć o odcinek drogi $l = 4\,cm$?



Z prawa ciągłości:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot v_1$$

Z prawa Bernoulliego:

$$p + \frac{\rho \cdot {v_1}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = \frac{\rho \cdot {v_2}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h$$

STATYKA I DYNAMIKA PŁYNÓW

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho \cdot {v_1}^2}{2} = \frac{\rho \cdot \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} \cdot {v_1}^2}{2}$$

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho \cdot \left(\frac{l}{t}\right)^2}{2} = \frac{\rho \cdot \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} \cdot \left(\frac{l}{t}\right)^2}{2}$$

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho \cdot \left(\frac{l}{t}\right)^2}{2}\left(1 - \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}\right) = 0$$

$$\frac{F}{S_1} = \frac{\rho \cdot \left(\frac{l}{t}\right)^2}{2}\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} - 1\right)$$

$$\frac{F}{S_1} \cdot t^2 = \frac{\rho \cdot l^2}{2}\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} - 1\right)$$

$$\frac{F}{S_1} \cdot t^2 = \frac{\rho \cdot l^2}{2}\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} - 1\right)$$

$$t^2 = \frac{S_1 \cdot \rho \cdot l^2}{2 \cdot F}\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} - 1\right)$$

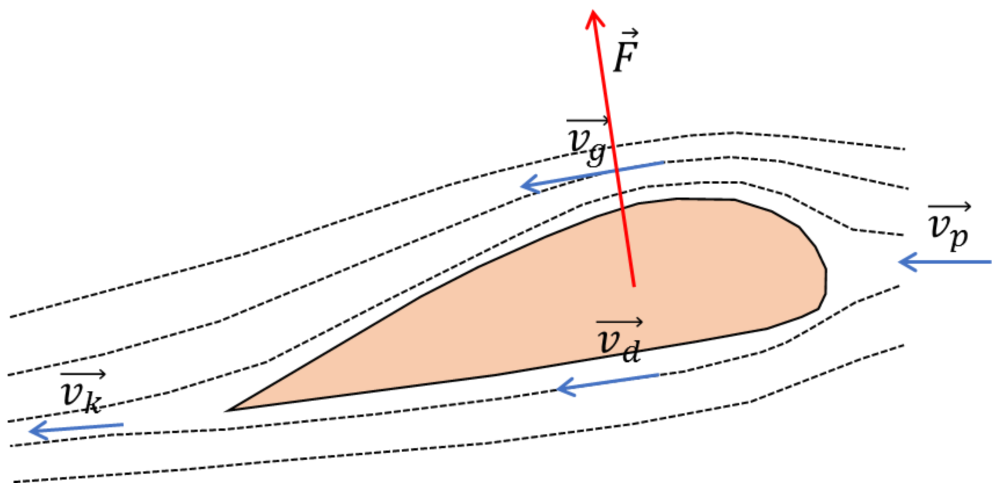
$$t = \sqrt{\frac{S_1 \cdot \rho \cdot l^2}{2 \cdot F}\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} - 1\right)}$$

$$t = \sqrt{\frac{1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 7{,}5}\left(\frac{(1{,}8 \cdot 10^{-4})^2}{(2 \cdot 10^{-6})^2} - 1\right)}$$

$$t = \sqrt{\frac{1{,}8 \cdot 16 \cdot 10^{-5}}{15} \cdot \left((0{,}9 \cdot 10^2)^2 - 1\right)} = \sqrt{1{,}9 \cdot 10^{-5} \cdot 8099} \approx 0{,}4\ s$$

DYNAMICZNA SIŁA NOŚNA

Dynamiczna siła nośna – siła wywołana ruchem ciał (skrzydło samolotu, śmigło) w płynach



Linie prądu nad skrzydłem są rozmieszczone gęściej niż pod skrzydłem!

Zgodnie z prawem ciągłości prędkość powietrza nad skrzydłem jest większa niż pod skrzydłem!

Ponieważ dla powietrza zmiany ciśnienia hydrostatycznego możemy zaniedbać, to zgodnie z prawem Bernoulliego ciśnienie jest lokalnie mniejsze nad a większe pod skrzydłem!